CAPITOLO 1

Modelli matematici: aspetti generali

1.1 PREMESSA

La bioingegneria è una scienza che si occupa dell'applicazione di metodi e tecniche propri dell'ingegneria per la risoluzione di problemi di tipo biomedico. Uno degli obiettivi principali della bioingegneria è stato quello di introdurre nella medicina ed in particolare nella fisiologia il concetto e l'uso dei modelli matematici. La descrizione e lo studio dei sistemi fisiologici traggono enormi vantaggi da un'impostazione del problema di tipo modellistico. Infatti, come sarà più chiaro nel seguito, l'uso di modelli matematici permette, fra l'altro, di evidenziare differenze quantitative (e non soltanto qualitative) fra diverse teorie, di riassumere i risultati di vari esperimenti in modo estremamente conciso, di prevedere in modo quantitativo i risultati di nuovi e diversi esperimenti, di programmare gli esperimenti in modo ottimale e di dare indicazioni quantitative precise circa il valore di parametri fisiologici non accessibili per una misura diretta.

In generale si può asserire che un modello matematico di un sistema fisiologico è la rappresentazione del sistema stesso mediante relazioni di tipo matematico. Anche se le attuali conoscenze di anatomia e fisiologia sono tuttora per alcuni apparati non del tutto

consolidate e quindi non permettono per questi di formulare validi modelli matematici, in un grande numero di casi è stato possibile applicare il concetto di modello matematico ed utilizzarne le sue potenzialità al fine valutare quantitativamente il comportamento del sistema in studio, ottenendo risultati significativi che hanno permesso di cambiare le metodologie diagnostiche e terapeutiche, di progettare nuovi sistemi di strumentazione biomedica e di realizzare organi artificiali sempre più affidabili.

Il modello matematico di un sistema fisiologico può essere più o meno fedele alla realtà anatomo-fisiologica: molto spesso in medicina, come in altri campi di applicazione, si usano descrizioni approssimate per guadagnare in semplicità. Infatti quanto più dettagliata e quindi fedele è la descrizione del sistema, tanto più complesso risulta il modello. Nella pratica è inutile ricorrere a modelli molto sofisticati quando i parametri che in essi compaiono si conoscono solo in modo approssimativo. Uno stesso sistema fisiologico può essere quindi rappresentato con modelli matematici diversi a seconda del livello di dettaglio e quindi dell'impiego a cui è destinato il modello stesso. La scelta del livello di dettaglio nella descrizione del sistema rientra nella fase di costruzione del modello che verrà più approfonditamente discussa nel capitolo 3.

1.2 SIMULAZIONE ED IDENTIFICAZIONE

Si voglia studiare un generico sistema *S* (ad esempio, un sistema fisiologico) rappresentato in modo sintetico con un rettangolo in fig. 1.1. Sia ***u**(t)* il vettore degli ingressi, dipendenti dal tempo *t*, a cui tale sistema è soggetto e ***y**(t)* quello delle uscite del sistema stesso. (In generale in un sistema si possono avere più di un ingresso e più di un uscita; per questo si parla comunemente di vettore degli ingressi e delle uscite. Per indicare un vettore si impiegheranno simboli in grassetto).

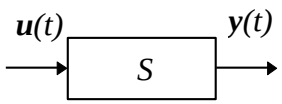

Fig. 1.1 - Rappresentazione schematica di un sistema con ingresso ***u(t)*** e uscita ***y(t)***.

Si supponga di conoscere un modello matematico *M* del sistema *S* e, in particolare, sia la struttura di *M* che il valore di tutti i parametri che lo caratterizzano.

Dando ad *M* gli stessi ingressi $\boldsymbol{u(t)}$ del sistema reale il modello stesso fornirà uscite che verranno indicate con $\boldsymbol{y_M(t)}$ (fig. 1.2). Le differenze fra le uscite $\boldsymbol{y(t)}$ del sistema e quelle $\boldsymbol{y_M(t)}$ del modello dipenderanno dalla effettiva corrispondenza del modello al sistema. Quanto più il modello matematico sarà aderente al sistema in studio, tanto più piccole saranno le differenze fra $\boldsymbol{y}$ ed $\boldsymbol{y_M}$.

Se *M* è un buon modello matematico di *S*, tramite il suo impiego è possibile ottenere una previsione attendibile $\boldsymbol{y_M(t)}$ dell'uscita reale $\boldsymbol{y(t)}$ del sistema per un generico ingresso $\boldsymbol{u(t)}$. In questo caso il modello *M* permette di simulare il comportamento del sistema analizzato.

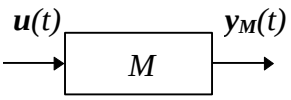

Fig. 1.2 - Modello matematico *M* di un generico sistema.

Quando si parla di utilizzazione di un modello matematico per scopi di simulazione si intende perciò prevedere le uscite del sistema in studio conoscendo gli ingressi a cui il sistema è sottoposto e il modello matematico del sistema sia nella struttura che nel valore dei parametri. Quindi, affinché una simulazione fornisca risultati attendibili, bisogna che siano noti con sufficiente approssimazione sia la struttura del modello matematico che il valore dei suoi parametri per il particolare sistema oggetto dello studio. Conoscere la struttura del modello matematico significa avere determinato tutte le relazioni matematiche esistenti fra le variabili ed i parametri del modello stesso, mentre conoscere il valore dei parametri significa avere personalizzato il modello stesso ad una particolare situazione reale e, più precisamente, ad un particolare paziente quando si considerano applicazioni di tipo biomedico. In sintesi si può riassumere il concetto di simulazione come:

<u>*Simulazione*</u>: noti $\boldsymbol{u(t)}$ e $M \Rightarrow$ previsione di $\boldsymbol{y(t)}$

È chiaro che utilizzare un modello matematico di un sistema fisiologico in fase di simulazione ha applicazioni estremamente importanti e di enorme utilità in medicina. Si pensi ad esempio ai vantaggi che si possono ottenere nella sperimentazione preclinica di un farmaco o di una terapia. In questo caso l'uso dei modelli permette di diminuire

sensibilmente la sperimentazione su animale. Un numero praticamente illimitato di esperimenti possono essere infatti simulati in tempi brevi tramite modello matematico. La sperimentazione su animale risulterà necessaria solo nella fase iniziale per la messa a punto del modello e nella fase finale dello studio per valutare e confermare la validità dei risultati significativi ottenuti dalla simulazione. Tutto ciò, oltre a ridurre il numero di animali necessari per lo studio, comporta un grande risparmio di tempo e di denaro.

Identificare un sistema *S* significa determinare la struttura e il valore dei parametri del modello matematico che caratterizza il sistema in oggetto. Nella realtà attuale, in medicina, molti studi sono rivolti alla determinazione della struttura del modello di particolari sistemi fisiologici. Tuttavia, per scopi specifici, il problema di determinare la struttura dei modelli matematici di molti sistemi fisiologici è già stato risolto in maniera soddisfacente. In questi casi il problema che si presenta spesso in clinica si riduce a determinare il valore dei parametri relativo ad un particolare paziente. Questo problema è noto con il nome di stima parametrica. Esso può essere risolto fornendo al sistema *S* ed al modello matematico *M* ingressi identici, misurando le uscite $\boldsymbol{y}(t)$ del sistema e calcolando quelle $\boldsymbol{y}_M(t)$ del modello e modificando in modo iterativo il valore dei parametri del modello in modo da minimizzare le differenze fra le uscite reali e quelle fornite dal modello. In tal modo è possibile stimare il valore dei parametri del modello che simula nel modo migliore il funzionamento del sistema fisiologico. Quindi, considerata valida la struttura ipotizzata per il modello, l'approccio appena descritto permette di ottenere la stima del valore di parametri che hanno una rilevanza clinica e che possono non essere direttamente misurati con le usuali procedure oppure, con tali procedure, possono essere misurati con grande difficoltà, con notevoli costi o con metodi particolarmente cruenti e pericolosi per il paziente.

Così, ad esempio se si vuole misurare l'elasticità del parenchima polmonare, non potendo effettuare direttamente tale misura, si ricorre alla determinazione di un opportuno modello matematico del sistema della meccanica del respiro ed in base a misure di ingresso ed uscita del sistema (ad esempio il flusso alla bocca e la pressione transpolmonare che sono variabili direttamente accessibili e facilmente misurabili con trasduttori di flusso e pressione) si stima il valore dell'elasticità del parenchima polmonare nel soggetto in esame.

In sintesi si può riassumere il concetto di identificazione come:

Identificazione: noti $\boldsymbol{u}(t)$ e $\boldsymbol{y}(t) \Rightarrow M$ (struttura e valore dei parametri)

Stima parametrica: noti $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ e la struttura di $M \Rightarrow$ il valore dei parametri di M

Poiché in clinica molti parametri biomedici di interesse diagnostico non sono accessibili o, comunque, direttamente misurabili è ovvia l'importanza che assume nella pratica medica l'utilizzo dei modelli matematici di sistemi fisiologici. Molta strumentazione routinariamente impiegata negli ospedali e negli ambulatori medici fornisce stime di parametri di sistemi fisiologici che vengono impiegate dai medici in fase di diagnosi, monitoraggio e controllo della terapia. Tali strumenti funzionano sulla base di opportuni modelli matematici dei sistemi in esame. È chiaro che l'utente medico può apprezzare le qualità di tali strumenti e conoscerne i limiti di impiego solo se ha ben chiaro l'approccio che essi utilizzano per funzionare e quindi se conosce le caratteristiche dei modelli matematici dei sistemi fisiologici che essi impiegano. Infatti, la stima di un parametro ottenuta in una determinata condizione sperimentale può non essere più valida nel momento in cui si cambia la condizione sperimentale stessa, anche se non cambiano le condizioni fisiopatologiche del paziente in esame. Così, ad esempio, stimare l'elasticità del parenchima polmonare in ventilazione meccanica tradizionale (bassa frequenza respiratoria) richiede l'uso di un modello molto diverso rispetto a quello utilizzabile per stimare lo stesso parametro in ventilazione meccanica ad alta frequenza respiratoria. Cambiando la tecnica di ventilazione è quindi necessario cambiare la struttura del modello impiegato. In altre parole la stima ottenuta nel caso di ventilazione ad alta frequenza utilizzando il modello respiratorio per basse frequenze non è più valida e perciò non è clinicamente attendibile.

1.3 SISTEMI ASTRATTI ORIENTATI

Prima di addentrarsi nello studio dei modelli di sistemi fisiologici è necessario introdurre un minimo di formalismo. In pratica si tratta di occuparsi di *sistemi astratti* (cioè di modelli matematici di sistemi fisici) *orientati*. L'aggettivo "orientato" sottolinea l'aspetto causale, per cui se a partire da un certo istante generico t_0 si esercita sul sistema una certa azione, mediante l'ingresso $\boldsymbol{u}(t)$, il sistema risponde con un'uscita $\boldsymbol{y}(t)$ che dipende dall'ingresso fornito nell'intervallo di tempo $[t_0, t]$.

Per rappresentare il sistema da un punto di vista quantitativo è necessario mettere in relazione il vettore degli ingressi $\boldsymbol{u}(t)$ (cause) con quello delle uscite $\boldsymbol{y}(t)$ (effetti). È importante sottolineare che in generale il valore dell'uscita in un generico istante t non

dipende solo dal valore dell'ingresso in quell'istante, ma è determinato da tutta la storia passata del sistema.

Per capire meglio questo ultimo fatto è conveniente considerare l'esempio del sistema fisico in fig. 1.3. Esso è costituito da un serbatoio cilindrico in cui viene immessa acqua attraverso il rubinetto in alto e da cui, attraverso il rubinetto posizionato nel punto più basso del serbatoio stesso, esce acqua verso l'esterno. In questo caso l'ingresso del sistema *u(t)* è il flusso di acqua che entra nel serbatoio, mentre l'uscita *y(t)* è il flusso uscente. (Si noti come, in questo esempio, sia l'ingresso che l'uscita sono variabili scalari e quindi per indicarle non sono stati usati simboli in grassetto).

L'uscita *y(t)* dipende ovviamente dal livello di acqua *h(t)* presente nel serbatoio. Per esprimere l'uscita in un istante generico non è dunque sufficiente conoscere la sola variabile di ingresso. È intuitivo osservare che, nell'esempio considerato, all'istante *t* il livello *h(t)* congloba in sé l'informazione su tutta la storia passata del sistema. In generale, per poter descrivere il comportamento di un sistema fisico, è necessario introdurre, oltre ai vettori di ingresso e di uscita, una nuova variabile che dia conto dell'effetto che la storia passata del sistema ha sul suo comportamento attuale. Questa ulteriore variabile, che generalmente è anche essa di tipo vettoriale, viene detta variabile di stato ed indicata con il simbolo ***x****(t)*.

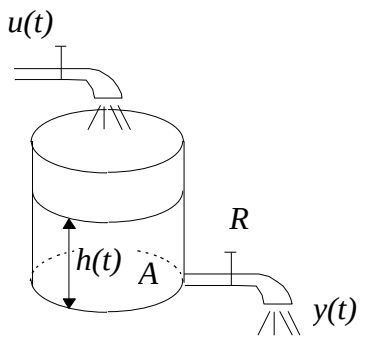

Fig. 1.3 - Serbatoio cilindrico con un rubinetto in ingresso e uno in uscita.

Volendo scrivere le equazioni che caratterizzano il sistema in fig. 1.3, si può osservare che la variazione di volume di acqua nell'unità di tempo all'interno del serbatoio sarà uguale, istante per istante, alla differenza fra il flusso entrante e quello

uscente dal serbatoio. Poiché il volume di acqua presente nel serbatoio all'istante *t* è pari a:

$$V(t) = A\,h(t) \tag{1.1}$$

dove *A* è la sezione del serbatoio (area di base del cilindro) e la variazione di volume nell'unità di tempo è la derivata del volume rispetto al tempo, è possibile scrivere la seguente relazione:

$$\frac{d\,V(t)}{dt} = A\,\frac{d\,h(t)}{dt} = u(t) - y(t) \tag{1.2}$$

D'altronde, indicata con *R* la resistenza idraulica del rubinetto in uscita dal serbatoio, è noto dalla fisica che il flusso di acqua *y(t)* in uscita dal serbatoio sarà uguale a:

$$y(t) = \frac{p(t)}{R} \tag{1.3}$$

dove con *p(t)* è stata indicata la pressione al livello del rubinetto di uscita. Poiché tale pressione è proprio uguale all'altezza *h(t)* della colonna di acqua nel serbatoio, l'equazione (1.3) può essere riscritta come:

$$y(t) = \frac{h(t)}{R} \tag{1.4}$$

Combinando le equazioni (1.2) e (1.4) si ottiene quindi:

$$A\,\frac{dh(t)}{dt} = u(t) - \frac{h(t)}{R} \tag{1.5}$$

Il comportamento del sistema è quindi descritto dalle due relazioni:

$$\begin{cases} A\,\dfrac{dh(t)}{dt} = u(t) - \dfrac{h(t)}{R} \\ y(t) = \dfrac{h(t)}{R} \end{cases} \tag{1.6}$$

di cui la prima è un'equazione differenziale del primo ordine, lineare e a coefficienti costanti, e la seconda è una semplice equazione algebrica.

La variabile *h(t)* che compare nel sistema (1.6) sia in forma derivata che non derivata è in questo caso la variabile di stato del sistema. Nell'esempio qui considerato essa è una variabile scalare che verrà indicata con *x(t)*. In termini di ingresso, stato e uscita il comportamento del serbatoio può essere quindi descritto dal sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -\dfrac{1}{AR}\,x(t) + \dfrac{1}{A}\,u(t) \\ y(t) &= \dfrac{1}{R}\,x(t) \end{cases} \tag{1.7}$$

dove la derivata di *x(t)* rispetto al tempo è stata brevemente indicata con $\dot{x}(t)$.

Poiché la prima relazione è un'equazione differenziale del primo ordine, è chiaro che, una volta noto l'ingresso *u(t)* nell'intervallo di tempo [t_0, t], l'uscita *y(t)* potrà essere calcolata solo se è noto anche il valore dello stato all'istante t_0 , cioè $x(t_0)$. A parità di ingresso, lo stesso sistema fornirà istante per istante un valore dell'uscita che dipenderà dal valore dello stato $x(t_0)$. In altre parole il flusso di acqua che esce dal serbatoio non dipende solo dal flusso di acqua che viene immesso nel serbatoio stesso a partire dall'istante iniziale t_0, ma anche dal livello di acqua presente nel serbatoio al tempo t_0. Il valore $x(t_0)$ riassume in sé tutta la storia passata del sistema fino all'istante t_0. In seguito, per brevità, si userà la locuzione stato iniziale per indicare il valore dello stato all'istante iniziale t_0 dell'intervallo di osservazione [t_0, t].

Nel caso generale di un sistema avente variabili di ingresso, stato ed uscita di tipo vettoriale, le equazioni (1.7) assumono la forma:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \end{cases} \tag{1.8}$$

con $\boldsymbol{x}(t_0)$ assegnato.

Il concetto di stato di un sistema ha quindi un'importanza cruciale quando si vuole studiare il comportamento del sistema da un punto di vista matematico. L'idea intuitiva che è racchiusa all'interno della frase "lo stato iniziale del sistema è $\boldsymbol{x}(t_0)$" è che, conoscendo $\boldsymbol{x}(t_0)$, uno conosce tutto ciò che è necessario sapere sul sistema per determinarne il comportamento futuro supponendo di osservare, a partire dall'istante iniziale t_0, gli stimoli a cui il sistema è soggetto.

Le equazioni (1.8) definiscono in forma differenziale un sistema astratto orientato, che viene detto di tipo proprio in quanto le due funzioni $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ dipendono dall'ingresso ma non dalle sue derivate.[1]

Si noti che, nel caso in cui le variabili di stato e di uscita siano di tipo vettoriale, ad entrambi le equazioni (1.8) corrisponde in realtà un sistema di equazioni. In particolare alla prima equazione vettoriale (equazione di stato) corrisponde un sistema di equazioni differenziali del primo ordine che descrive l'evoluzione dello stato del sistema, una volta noto lo stato iniziale del sistema. Questo primo blocco di equazioni, dal quale si deduce che la derivata temporale dello stato è una funzione $\boldsymbol{f}$ dello stato stesso, dell'ingresso e del tempo, descrive il comportamento della cosiddetta parte dinamica del sistema. Alla seconda equazione vettoriale (1.8) corrisponde invece un sistema di equazioni algebriche che rappresenta la cosiddetta trasformazione di uscita, dalla quale risulta che l'uscita del sistema è una funzione $\boldsymbol{g}$ dello stato, dell'ingresso e del tempo.

Per lo studio dei sistemi astratti orientati è infine importante dare la definizione di stato zero o stato di quiete. Uno stato di un sistema è detto stato zero o di quiete se, a partire da detto stato con ingresso identicamente nullo, l'uscita rimane anche essa identicamente nulla, mentre lo stato non varia qualunque sia l'intervallo di osservazione. Si noti che un sistema può avere un solo stato zero, può averne più di uno oppure può non averne nessuno.

1.4 SISTEMI ASTRATTI ORIENTATI LINEARI E STAZIONARI

Nel seguito, se non verrà espressamente indicato il contrario nel testo, lo studio dei sistemi sarà limitato ad una particolare sottoclasse di sistemi astratti orientati del tipo (1.8) che prendono il nome di sistemi lineari.

Se un sistema astratto orientato è definito dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\,\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\,\boldsymbol{u}(t) \end{cases} \tag{1.9}$$

[1] Si può dimostrare che non tutti i sistemi astratti orientati sono rappresentabili in forma differenziale di tipo proprio. In seguito, peraltro, ci si limiterà ad esaminare solo sistemi di questo tipo, cioè riconducibili ad una coppia di equazioni vettoriali del tipo (1.8).

ove $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$, $\boldsymbol{C}(t)$ e $\boldsymbol{D}(t)$ sono opportune matrici con elementi funzioni del tempo t, il sistema stesso è lineare, ovvero è lineare rispetto all'ingresso a partire da stato zero, è lineare rispetto allo stato con ingresso zero e gode della proprietà di decomposizione.

In particolare un sistema astratto orientato è detto lineare rispetto all'ingresso quando soddisfa la proprietà di sovrapposizione degli effetti, cioè quando, essendo $\boldsymbol{u}_1(t)$ e $\boldsymbol{u}_2(t)$ due qualunque vettori di segnali di ingresso e $\boldsymbol{y}_1(t)$ e $\boldsymbol{y}_2(t)$ le uscite ad essi corrispondenti a partire da stato zero, al segnale di ingresso $a_1\boldsymbol{u}_1(t)+a_2\boldsymbol{u}_2(t)$ corrisponde, sempre a partire da stato zero, l'uscita $a_1\boldsymbol{y}_1(t)+a_2\boldsymbol{y}_2(t)$, dove a_1 e a_2 sono costanti arbitrarie. Qualora non si parta da stato zero la definizione resta valida purché si convenga di sottrarre dall'uscita l'andamento che essa avrebbe con ingresso nullo.

Per quanto riguarda le dimensioni delle matrici $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$, $\boldsymbol{C}(t)$ e $\boldsymbol{D}(t)$ che compaiono nelle equazioni (1.9) si può notare che $\boldsymbol{A}(t)$ è necessariamente una matrice quadrata le cui dimensioni dipendono esclusivamente dalla dimensione del vettore di stato, mentre le altre matrici hanno dimensioni che dipendono anche dai vettori di ingresso e di uscita.[2] Più precisamente, nel caso generale con vettori di ingresso, stato ed uscita con dimensioni rispettivamente uguali a p, n e r la matrice $\boldsymbol{A}(t)$ avrà n righe e n colonne (matrice di dimensione $n\times n$), la matrice $\boldsymbol{B}(t)$ sarà $n\times p$, la matrice $\boldsymbol{C}(t)$ sarà $r\times n$ e la $\boldsymbol{D}(t)$ sarà $r\times p$.

Nel caso particolare di sistemi aventi un solo ingresso ed una sola uscita e con vettore di stato di dimensione n, la matrice $\boldsymbol{A}(t)$ sarà ancora una matrice $n\times n$ mentre $\boldsymbol{B}(t)$ sarà un vettore colonna con n elementi, $\boldsymbol{C}(t)$ un vettore riga con n elementi e $\boldsymbol{D}(t)$ semplicemente uno scalare. Il caso di sistemi con un solo ingresso ed una sola uscita è una situazione che si incontra di frequente in pratica anche nello studio di sistemi fisiologici. A questo tipo di sistemi viene comunemente dato il nome di sistemi SISO (single input, single output).

Un sistema astratto orientato, lineare o non lineare, si dice stazionario o tempo invariante quando soddisfa alla proprietà di traslazione nel tempo di cause e effetti, ovvero quando, essendo $\boldsymbol{u}(t)$ un qualunque vettore di segnali di ingresso e $\boldsymbol{y}(t)$ il vettore di uscita corrispondente a partire da stato zero, ad un ingresso traslato nel tempo $\boldsymbol{u}(t-T)$ corrisponde, sempre a partire da stato zero, un'uscita $\boldsymbol{y}(t-T)$ traslata nel tempo della stessa quantità T, dove T è una costante arbitraria.

---

[2] Il lettore non particolarmente esperto nel calcolo matriciale può trovare in Appendice 1 i concetti di base riguardanti l'algebra delle matrici.

Si può dimostrare che, se il sistema è lineare ed è rappresentato dalle equazioni (1.9) con ***A(t)***, ***B(t)***, ***C(t)*** e ***D(t)*** costanti, allora esso è anche stazionario. In altre parole un sistema lineare è anche stazionario quando i parametri che compaiono nelle equazioni che lo descrivono sono costanti e non dipendono dalla variabile tempo *t*. In questo caso le equazioni (1.9) possono essere riscritte nella forma:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases} \tag{1.10}$$

Confrontando le equazioni (1.8) e (1.9) si può notare che, sia nel caso di sistema astratto orientato generico sia nel caso particolare di sistema lineare, una volta calcolato lo stato ***x(t)*** dall'equazione di stato, l'uscita ***y(t)*** del sistema può essere ottenuta immediatamente mediante la trasformazione di uscita. Purtroppo però, per un generico sistema dinamico del tipo (1.8), non esistono in generale formule risolventi dell'equazione di stato. Al contrario, nel caso di un sistema lineare del tipo (1.9) si può dimostrare che è possibile esprimere la soluzione dell'equazione di stato, che è unica, in termini della cosiddetta matrice di transizione. Se poi il sistema è lineare e tempo invariante, cioè descritto dalle equazioni (1.10), è possibile ottenere la soluzione generale dell'equazione di stato in forma esplicita.[3]

1.5 ORDINE DI UN SISTEMA

Si consideri nuovamente il serbatoio cilindrico in fig. 1.3 e le relazioni (1.6) che ne descrivono il comportamento. Tenendo conto dell'equazione (1.1), *h(t)* può essere espressa come:

$$h(t) = \frac{V(t)}{A} \tag{1.11}$$

Sostituendo ora la precedente espressione di *h(t)* nelle equazioni (1.6) si ottiene la seguente descrizione matematica del comportamento del sistema in studio:

[3] Per maggiori dettagli, che esulano dagli obiettivi specifici di questo libro, il lettore può consultare un testo classico di teoria dei sistemi, quale, ad esempio, Callier F.M., Desoer C.A.: *Linear System Theory*, Springer-Verlag, 1991.

$$\begin{cases} \dfrac{dV(t)}{dt} = u(t) - \dfrac{V(t)}{AR} \\ y(t) = \dfrac{V(t)}{AR} \end{cases} \tag{1.12}$$

Osservando le equazioni (1.12) è immediato capire che in questo caso la variabile di stato che caratterizza il sistema è il volume di acqua *V(t)* presente nel serbatoio. Se si indica con $\xi(t)$ tale variabile la descrizione ingresso-stato-uscita del sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = -\dfrac{1}{AR}\xi(t) + u(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{AR}\xi(t) \end{cases} \tag{1.13}$$

dove, al solito, $\dot{\xi}(t)$ indica la derivata di $\xi(t)$ rispetto al tempo.

Per come sono state ricavate è ovvio che le rappresentazioni (1.7) e (1.13) sono del tutto equivalenti. Esse differiscono però per la scelta della variabile di stato che nel primo caso è il livello dell'acqua *h(t)* e nel secondo caso il volume di acqua *V(t)* presente nel serbatoio. Ciò porta a concludere che nella descrizione del sistema in fig. 1.3 la scelta della variabile di stato non è unica.

La conclusione ottenuta a partire dall'esempio di fig. 1.3 ha una validità di carattere generale. In altre parole la scelta del vettore di stato nella descrizione del comportamento di un sistema dinamico non è unica. In particolare, ad esempio, è facile dimostrare che, se $\mathbf{x}(t)$ è vettore di stato di un sistema, lo è anche ogni vettore $\xi(t)$ ottenuto da $\mathbf{x}(t)$ mediante trasformazione lineare non singolare. Ciò è quello che accade nell'esempio del serbatoio in cui le due possibili scelte considerate per la variabile di stato sono legate tra loro dalla seguente trasformazione lineare:

$$x(t) = \frac{1}{A}\xi(t) \tag{1.14}$$

In generale però si può anche verificare che, a partire da un identico sistema, scelte differenti possono portare ad ottenere, nella definizione dello stato, vettori di stato aventi dimensioni diverse. Può ad esempio accadere di associare ad un sistema un vettore di stato di dimensione m (cioè con m componenti), quando lo stesso sistema è rappresentabile anche utilizzando un vettore di stato di dimensione $n < m$.

Dato un generico sistema definibile mediante equazioni del tipo (1.9) si definisce allora come ordine del sistema la dimensione minima del vettore di stato ad esso associabile.

È bene quindi osservare che, in generale, l'ordine di un sistema non coincide necessariamente con la dimensione del vettore di stato utilizzato per la descrizione del sistema stesso. Infatti, per quanto detto, ad un sistema lineare di ordine n possono essere associati vettori di stato di dimensione $m \geq n$.

Si può infine dimostrare che, dato un sistema lineare di ordine n, se $\boldsymbol{x}(t)$ è un vettore di stato di dimensione n, ogni altro modo di associare un vettore di stato della stessa dimensione porta necessariamente ad un vettore $\xi(t)$ legato a $\boldsymbol{x}(t)$ dalla relazione lineare:

$$\boldsymbol{x}(t) = \Gamma \xi(t) \tag{1.15}$$

dove Γ è una matrice $n \times n$ non singolare, cioè con determinante diverso da zero.

1.6 SISTEMI E ANALOGIA: L'ANALOGIA ELETTRICA

D'ora in poi si parlerà, per brevità, di modello matematico o, anche più semplicemente, di modello anziché di sistema astratto orientato. In questo paragrafo si metterà in evidenza come a due sistemi fisici diversi possano talvolta corrispondere due modelli formalmente identici. In questo caso i due sistemi sono analoghi, ovvero, anche se le grandezze in gioco nei sistemi considerati sono di natura fisica diversa, esse sono legate fra loro da leggi formalmente dello stesso tipo.

Per capire meglio quanto detto è utile partire da un esempio. Si consideri il circuito elettrico in fig. 1.4. In questo circuito è presente un generatore di tensione, $v(t)$, che alimenta il parallelo di un condensatore, con capacità C, e di un resistore, con resistenza R. Si indichi con $i(t)$ la corrente erogata dal generatore di tensione. Una volta giunta al nodo A del circuito, tale corrente si divide in due componenti, una , indicata con $i_C(t)$, che dal nodo A va verso il nodo B passando sul condensatore e l'altra, detta $i_R(t)$, che invece raggiunge il nodo B passando attraverso il resistore.

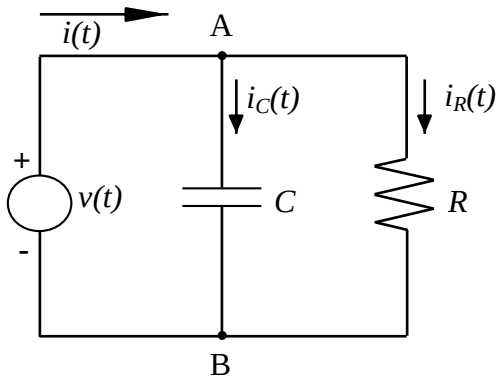

Fig. 1.4 - Circuito elettrico RC parallelo.

Come sarà visto in dettaglio nel capitolo 2, la corrente $i_C(t)$ che attraversa il condensatore è esprimibile in funzione della differenza di potenziale $v(t)$ ai capi del condensatore stesso e della sua capacità C come:

$$i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{1.16}$$

La corrente $i_R(t)$ che attraversa il resistore R è invece semplicemente espressa dalla legge di Ohm, cioè:

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} \tag{1.17}$$

Tenuto conto del fatto che:

$$i(t) = i_C(t) + i_R(t) \tag{1.18}$$

si ottiene la seguente relazione che lega $i(t)$ a $v(t)$:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R}v(t) \tag{1.19}$$

Se si pone:

$$u(t) = i(t) \quad \text{e} \quad y(t) = i_R(t) \tag{1.20}$$

e si tiene conto delle equazioni (1.19) e (1.147) il comportamento del circuito di fig. 1.4 è descritto dalle due relazioni:

$$\begin{cases} C\dfrac{dv(t)}{dt} = u(t) - \dfrac{1}{R}v(t) \\ y(t) = \dfrac{v(t)}{R} \end{cases} \tag{1.21}$$

In questo caso la variabile *v(t)* che compare nel sistema (1.21) è l'unica variabile di stato presente nel sistema, che verrà al solito indicata con *x(t)*. In termini di variabili di ingresso, stato ed uscita il circuito elettrico in fig. 1.4 sarà perciò caratterizzato dal sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{1}{CR}x(t) + \dfrac{1}{C}u(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{R}x(t) \end{cases} \tag{1.22}$$

Confrontando i sistemi (1.7) e (1.22) si nota che le relazioni presenti sono formalmente identiche. In altre parole il comportamento del serbatoio in fig. 1.3 e quello del circuito elettrico in fig. 1.4 sono descritti dallo stesso modello matematico nel momento in cui viene rispettata l'analogia riportata in tabella 1.1.

TABELLA 1.1 - TABELLA DI CORRISPONDENZA FRA I SISTEMI DI FIG. 1.3 E 1.4.

Flusso di acqua entrante	↔	Corrente erogata dal generatore
Altezza dell'acqua nel serbatoio	↔	Differenza di potenziale fra i punti A e B
Flusso di acqua in uscita	↔	Corrente sul resistore
Resistenza idraulica del rubinetto	↔	Resistenza elettrica del resistore
Sezione del serbatoio cilindrico	↔	Capacità elettrica del condensatore

I due sistemi presi in esame sono quindi da considerarsi analoghi. Nella pratica si usa dire che il circuito di fig. 1.4 è l'analogo elettrico del sistema idraulico di fig. 1.3.

Molto spesso nelle applicazioni della modellistica in medicina si impiega un approccio che fa uso dell'analogia elettrica per rappresentare un sistema fisiologico. Come sarà più chiaro nel seguito di questo libro, tale approccio fornisce due grandi vantaggi. Il primo è che l'uso dell'analogia elettrica nello studio dei sistemi fisiologici permette di ottenere una semplice rappresentazione grafica di un modello concettuale anche complesso. Infatti, una volta trovato l'analogo elettrico del sistema fisiologico, esso può essere facilmente disegnato utilizzando la nota simbologia standard impiegata in fisica e in ingegneria per la teoria dei circuiti elettrici. Il secondo importante vantaggio è che, a partire dall'analogo elettrico del sistema fisiologico, risulta semplice risalire al modello matematico che rappresenta il sistema fisiologico in oggetto. Infatti, mediante le leggi di Kirchhoff, è possibile trovare le relazioni matematiche (e quindi il modello matematico) che descrivono il comportamento dell'analogo elettrico. Note tali relazioni, tenendo presente l'analogia utilizzata (tabella di corrispondenza), è infine immediato ottenere le equazioni che caratterizzano il modello matematico del sistema fisiologico in studio.

Per quanto detto si è pensato di dedicare il prossimo capitolo allo studio dei circuiti elettrici, in modo da fornire anche al lettore non particolarmente esperto in questo campo della fisica e dell'ingegneria strumenti di base di analisi dei circuiti elettrici tali da consentirgli di poter approfittare senza grossi problemi dei vantaggi forniti dall'impiego dell'analogia elettrica nello studio dei modelli matematici dei sistemi fisiologici.