I sistemi dinamici

Una categoria vastissima di fenomeni del mondo reale è descritta da un sistema dinamico.

Per sistema dinamico s'intende un sistema, di varia natura (fisica, chimica, elettromeccanica, economica et caetera), che evolve nel tempo.[2]

La descrizione di tale evoluzione può essere ottenuta con vari tipi di modelli matematici. In particolare, quando la variabile tempo è continua, i modelli più comuni sono basati sull'utilizzo di equazioni differenziali ordinarie o alle derivate parziali

In un caso abbastanza semplice le equazioni possono scriversi nella maniera seguente:

$$dx/dt = f[x(t), u(t), p]$$

$$y = g[x(t), p]$$

Si ha sostanzialmente un sistema di equazioni differenziali il cui vettore delle incognite **x(t)**, è funzione solo del tempo e costituisce "lo stato del sistema", **u(t)** o "input" rappresenta una eventuale perturbazione che arriva al sistema dall'esterno, e p è un vettore di parametri che caratterizza il sistema.

Alle equazioni differenziali si aggiunge talvolta la cosiddetta funzione di "output" che rappresenta una funzione nota dello stato e che è generalmente il risultato di misurazioni che si effettuano su una o più componenti dello stato.

ESEMPI

Decadimento radioattivo

Alcuni elementi o i loro isotopi sono instabili nel senso che decadono in isotopi di altri elementi mediante l'emissione di particelle alfa(elio), beta (elettroni), gamma(fotoni). Tali elementi sono detti radioattivi Il decadimento di un singolo nucleo radioattivo è un evento random e quindi il tempo di decadimento non può essere previsto con certezza; si può tuttavia descrivere il processo di decadimento di un numero elevato di nuclei radioattivi basandosi sulla seguente legge sperimentale:

In un campione di un elevato numero di nuclei radioattivi, la diminuzione del numero di nuclei in un certo intervallo di tempo è direttamente proporzionale alla lunghezza dell'intervallo e al numero di nuclei presenti all'inizio dell'intervallo.

Il numero dei nuclei è intero ma idealizzando il modello si può invece del numero considerare la loro massa **N(t)**, supposta continua, per cui si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$dN/dt = -kN(t)$$

Posto $\mathbf{N(t_0) = N_0}$, la soluzione di questa equazione,

$$\mathbf{N(t) = N_0 e^{-k\,(t-t0)}}$$

consente di calcolare le concentrazioni residue di nuclei radioattivi in tempi **t** diversi da $\mathbf{t_0}$, il tempo di dimezzamento che risulta indipendente da $\mathbf{N_0}$ e $\mathbf{t_0}$ e viene utilizzato, per esempio, per datare i reperti archeologici, il tempo occorrente affinchè la concentrazione di radioattività dell'ambiente dopo eventi tipo Chernobil decada a livelli al disotto della soglia di pericolosità, et caet....

Modello a compartimenti per la dinamica del piombo nel corpo umano

Un modello a compartimenti schematizza un sistema reale in cui si possono distinguere vari ambienti collegati fra loro in vario modo, attraverso i quali si diffonde una determinata sostanza. Tale modello è utilizzato per esempio per descrivere la cinetica del piombo nel corpo umano.

Il piombo è assorbito dal corpo attraverso la respirazione, i cibi e le bevande; dal polmone e dall'intestino entra nel sangue e quindi viene distribuito al fegato e ai reni ed eliminato principalmente attraverso il sistema urinario, la pelle il sudore. Il flusso di piombo può essere studiato dal punto di vista matematico da un modello a compartimenti

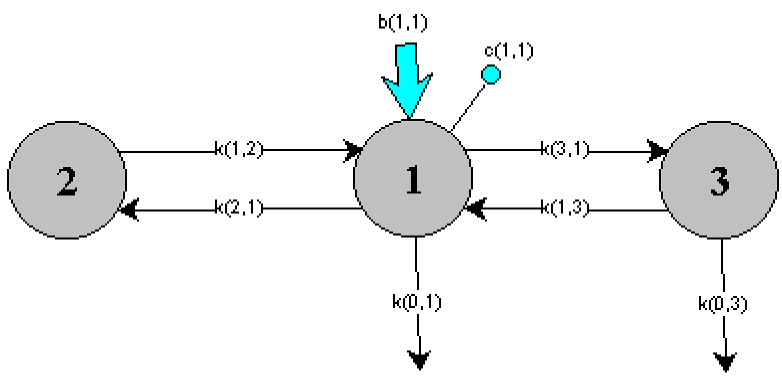
Le equazioni che descrivono il modello sono:

(sangue)	***dx1/dt = -(k(0,1)+k(0,1)+k(3,1)x1+k(1,2)x2+ k(1,3)x3 +u(t)***
(ossa)	***dx2/dt = k(2,1)x1-(k(0,2)+k(1,2))x2***
(tessuti)	***dx3/dt = k(3,1)x1-k(1,3)x3***

Si tratta di un sistema lineare che contiene un vettore di parametri $k_{(i,j).}$

Lo schema del relativo modello a compartimenti è illustrato in fig.1 dove si è considerato un input impulsivo u(t) = $b_{(1,1)}$.

FIGURA 1



Uno dei problemi che si possono affrontare con questo modello è quello di verificare se misurando il decadimento delle concentrazioni del piombo nel sangue, in un dato intrvallo di tempo, cioe conoscendo un output $\mathbf{y = c_{(1,1)}\, x_1}$, relativo ad un input noto, è possibile stimarne le concentrazioni nelle ossa e nei tessuti attraverso il calcolo delle *velocità di trasferimento* $\mathbf{k_{(i,j)}}$. Si tratta quindi di un problema di identificazione di parametri; esso si risolve partendo da un vettore di parametri presunto rispetto al quale si determina la **y**, e calcolando il vettore dei parametri che minimizza lo scostamento tra la **y** calcolata e la **y** misurata.

Purtroppo il processo di minimizzazione può convergere anche se la soluzione non è unica e quindi il pericolo è di assumere come valore del vettore dei parametri uno degli infiniti valori che minimizzano l'errore. Questo è proprio il caso di questo modello perchè una semplice indagine matematica dimostra che effettuando misurazioni solamente dello stato che è stato perturbato, il processo di identificazione di parametri di un sistema con la struttura di quello in esame, ha infinite soluzioni. Si tratterà allora di scegliere un altro protocollo sperimentale oppure di utilizzare conoscenze a priori di alcune componenti del vettore dei parametri.

Allo scopo di testare la possibilità di determinare univocamente un vettore di parametri per modelli lineari del tipo descritto sopra, è stato costruito con la collaborazione delle Universtà di Cagliari e di Padova, un software "easy-friendly" finalizzato all'utente medico[3].

<u>Modello matematico delle epidemie</u>

Supponiamo che in una data popolazione esistano due gruppi di individui: infettivi, e suscettibili di infezione ; nel caso che la malattia si diffonda per contatto diretto e considerando al posto del numero, le concentrazioni, $\mathbf{y_1}$ e $\mathbf{y_2}$ di infettivi e suscettibili supposte continue, le equazioni del modello diventano:

(infettivi) $dy1/dt = -b\ y2\ y1-u(t)$

(suscettibili) $dy2/dt =-g\ y2$

dove **b** e **g** sono parametri caratteristici del modello, noti i quali **u(t)** è una funzione di controllo, per esempio dipendente dal numero delle vaccinazioni.

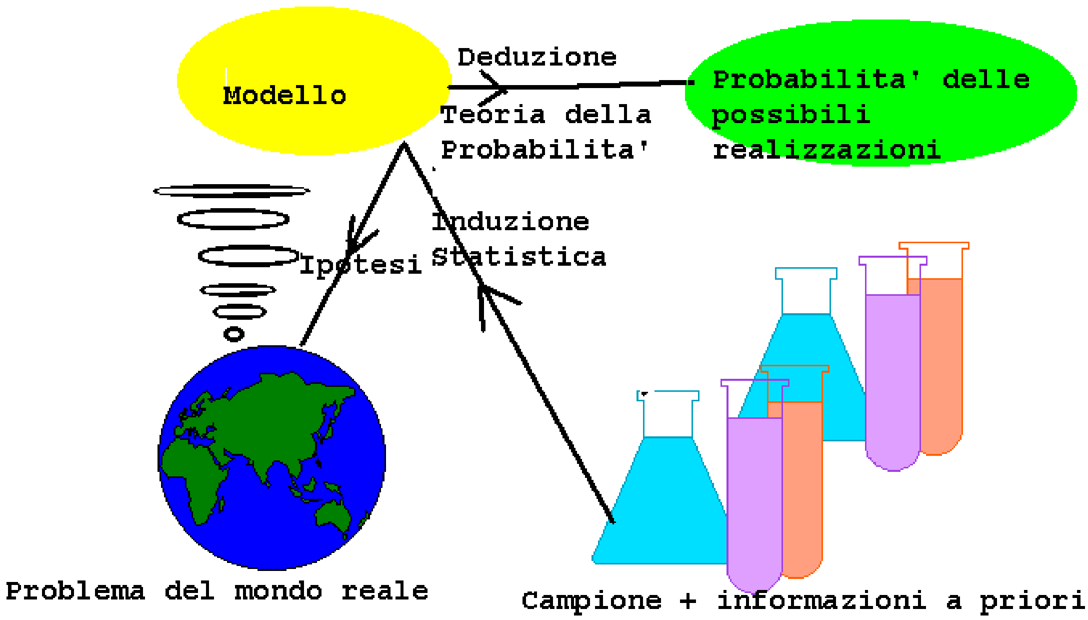
Questo modello non è lineare e la sua utilizzazione richiede, come per tutti i modelli non lineari, un controllo di alcune caratteristiche strutturali e computazionali che implica una matematica non banale.

Modelli probabilistici e statistici

Finora abbiamo parlato solo di modelli deterministici, cioè modelli per i quali si conosce una legge matematica che regola l'evoluzione del sistema, ma, come già accennato ci sono fenomeni che sfuggono ad una precisa legge; per esempio per quanto si sappia con precisione come è fatta una moneta, non si conosce una legge che dica quante volte in 10 lanci uscirà testa e quante croce, nè quanti elettori voteranno per un candidato in una data circoscrizione, nè , come già detto, quante particelle radioattive saranno emesse in un assegnato intervallo di tempo da una sostanza radioattiva.

Si tratta di fenomeni "aleatori"; per essi è necessario introdurre il concetto di probabiltà, cioè di un meccanismo per distinguere fra i diversi possibili risultati in termini del loro grado di incertezza; ciò richiede la costruzione, mediante metodi statistici di un modello formale (matematico) della situazione reale, che consente lo studio di tali fenomeni secondo uno schema, che, opportunamente semplificato, è descritto dalla seguente

FIGURA 2



Si ha un fenomeno del mondo reale; si esamina un campione e, sotto ipotesi semplificative e utilizzando informazioni a priori eventualmente note, si costruisce un modello, cioè con un metodo induttivo si ipotizza una certa forma funzionale con dei parametri caratteristici di quel particolare fenomeno, e si da una stima di tali parametri. Tale modello fornisce quindi una descrizione formale del fenomeno che, mediante la teoria della probabilità utilizzando il metodo deduttivo, consente di calcolare la probabilità che un certo fenomeno si realizzi con certe assegnate modalità[3].

Reti neurali [5]

Tre sono le discipline rivolte allo studio di fenomeni intellettuali:

- *la neurologia orientata a capire come è fatto il cervello*
- *la psicologia orientata a capire come si comporta il cervello*
- *l'intelligenza artificiale orientata ad emulare comportamenti intelligenti attraverso meccanismi meccanico-elettronici generalmente diversi da quelli biologici*

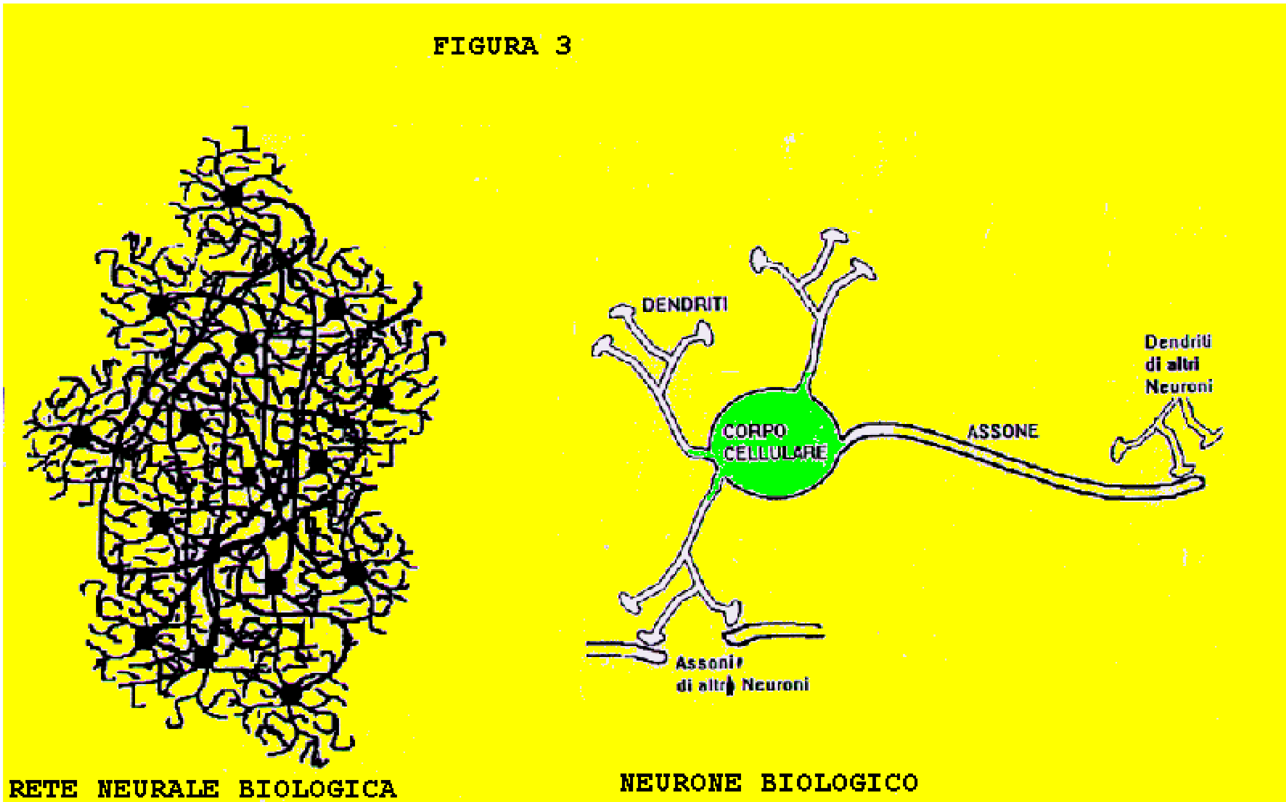
Fino a qualche anno fa queste discipline hanno seguito la loro strada senza influenzarsi a vicenda ma senza progredire in maniera significativa; allo scopo di creare nuove sinergie che aiutassero, da una parte ad approfondire i meccanismi di apprendimento e dall'altra a costruire macchine pensanti, nasce intorno agli anni 50 una nuova disciplina. Essa negli ambienti informatici esordisce inizialmente con lo scopo di riprodurre le strutture nervose sugli strumenti di calcolo, ma man mano progredisce con l'identificazione di modelli matematici che hanno sempre meno a che fare con la biologia, la psicologia e la medicina.

Oggi col termine reti neurali(o neuronali) si identifica una tecnologia di elaborazione dell'informazione complementare all'informatica classica.

I primi tentativi di schematizzare con modelli matematici il cervello umano risalgono a oltre mezzo secolo fa; da allora è stato un susseguirsi di sfiducia ed entusiasmo fino agli anni 80 in cui si assistè ad una rinascita delle reti neurali quando venne dimostrata l'esistenza di reti neurali dalla struttura piuttosto semplice in grado di svolgere funzioni complesse con elevata accuratezza e quindi si sostenne che le "capacità intellettuali" possono emergere come comportamento collettivo di unità fisiche piuttosto stupide.

Cos'è una rete neurale?

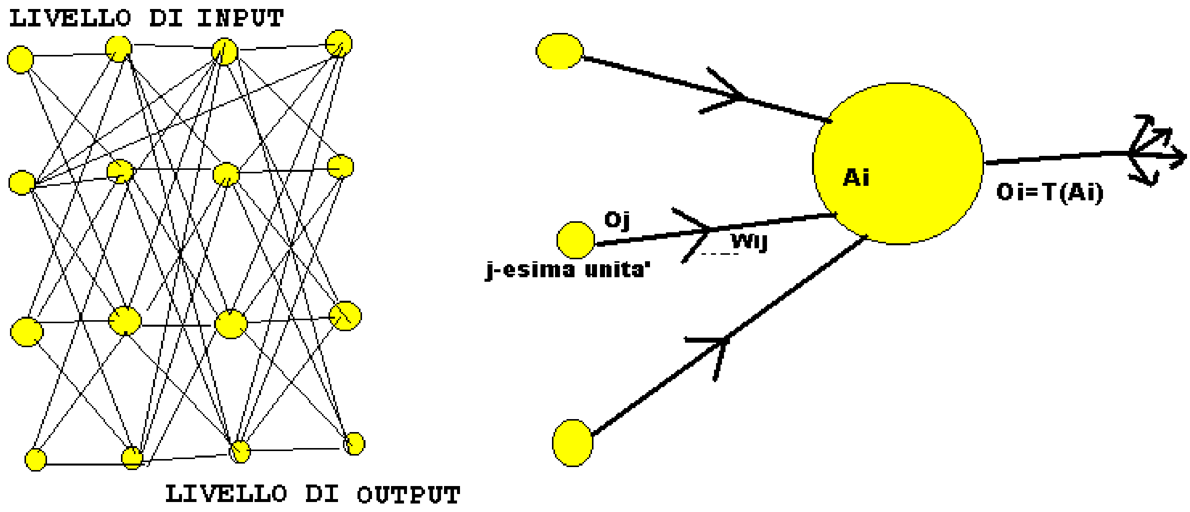
Partiamo da una rete neurale biologica.



Il cervello umano è costituito da 10 bilioni di cellule nervose (neuroni) che presentano un corpo cellulare capace di mantenere una concentrazione di cariche elettriche, con centinaia di milioni di interconnessioni *dendriti* e *assoni* a loro volta collegati mediante *sinapsi.*

Il contenuto informativo del cervello è rappresentato dall'insieme dei valori di attivazione dei neuroni che si trasmette attraverso un processo elettrochimico al dendrite attraverso la sinapsi; l'elaborazione dell'informazione è rappresentata dal flusso di segnali fra i vari neuroni che si eccitano o inibiscono a vicenda

FIGURA 4



RETE NEURALE ARTIFICIALE NEURONE FORMALE

La rete neurale artificiale è un insieme di "neuroni formali" collegati fra loro che si trasmettono vicendevolmente degli stimoli.

Il neurone formale è una schematizzazione del neurone biologico in cui le proprietà funzionali sono descritte da formule matematiche. Per distinguerlo da quello biologico lo chiameremo *unità* e anzichè dendriti e assoni diremo *input* e *output* dell'unità, da non confondersi con l'input e l'output dell'intero sistema.

Lo stato di eccitazione di un neurone verrà rappresentato dal valore di attivazione della unità sarà espresso da un numero reale; l'informazione che esce dal neurone sarà la funzione di output; essa darà il valore dell'output a partire da quello di attivazione.

Il funzionamento del neurone formale si può schematizzare come segue:

Data una rete formata da **n** unità, consideriamo l'i-esima unità e indichiamo con $\mathbf{O_j}$ l'output della j-esima unità espresso come numero reale; esso viene trasmesso alla unità i-esima opportunamente pesato; sia $\mathbf{W_{ij}}$ tale peso; quindi la i-esima unità riceve in input un segnale $\mathbf{W_{ij}\ O_j}$. Se il peso è compreso tra 0 e 1 , avrà la funzione di smorzare il segnale se maggiore di 1 di amplificarlo, se negativo di inibirlo.

Al valore di attivazione dell'unità i-esima concorrono tutte le unità collegate; esso sarà quindi uguale a

$$\mathbf{A_i} = \sum_j \mathbf{W_{ij} O_j}$$

Questo valore viene, attraverso una funzione **T** detta funzione di trasferimento , trasmesso ai neuroni connessi; l'output della singola unità risulta quindi :

$$\mathbf{O_i = T(A_i)}$$

L'input di una rete neurale è un insieme di numeri reali che indicheremo con **X** e l'output della rete un insieme che indicheremo con **Y**.

Il compito della rete è quello di calcolare una funzione **F** tale che **F(X) = Y**

L'esecuzione della funzione **F** avviene nel modo seguente:

Inizialmente la rete è in quiete e fornisce quindi un output nullo; quando riceve un segnale dall'esterno **X** le unità di input vengono sollecitate e mandano segnali alle altre unità che ricevono uno stimolo che dipende dai pesi delle connessioni; l'attivazione viene trasmessa all'esterno formando l'output **Y**.

Nella vita di una rete neurale si distinguono due momenti fondamentali:

- *apprendimento*
- *esecuzione.*

Affinchè una rete neurale fornisca informazioni deve essere "addestrata"

In termini matematici addestrare una rete significa fornirle un insieme di esempi sotto forma di coppie **X**, **Y** e lasciando che la rete trovi i valori dei pesi **W** che realizzano correttamente la funzione **Y = F(X)**. Tale scopo viene perseguito attraverso opportuni procedimenti di ottimizzazione che, passo dopo passo, aggiustano i pesi in modo da minimizzare lo scostamento dell'output da **Y**.

Un esempio volutamente naif ma illustrativo è quello di insegnare ad una rete il concetto di somma: anzichè fornirle un algoritmo si presentano alla rete alcuni esempi di somme: 1+6=7, 34+12235=12269...... Dopo aver "osservato" un certo numero di somme, la rete avrà imparato il concetto di somma e sarà in grado di eseguire somme di numeri mai visti prima.

Riassumendo:

- *apprendimento: trovare **W** dati **X** e **Y***
- *esecuzione: trovare **Y** dato **X** e **W***

Naturalmente la costruzione di una rete neurale non sempre andrà a buon fine.

Se l'attivazione delle unità presenta nei vari passi valori sempre diversi, la rete non converge, se valori sempre crescenti la rete esplode; se valori che si ripetono in ciclo la rete oscilla; se la stimolazione porta a valori che da un certo punto in poi non cambiano, la rete converge.

Ci sono dei precisi teoremi che danno le condizioni affinchè una rete possa convergere.

Questo è il caso più interessante perchè se si verifica quest'ultima situazione

La rete ha imparato !!

Da questo momento sarà in grado di elaborare l'informazione fornita dai dati **X** di un fenomeno analogo a quello per la quale è stata addestrata e potrà essere utilizzata per calcolare la **F(X)**.

Il fatto che le reti neurali possano apprendere dagli esempi le rende adatte ad essere utilizzate in quei campi applicativi in cui non si riesca o non sia conveniente trovare una soluzione algebrica o algoritmica; i campi più comuni di applicazione sono: le previsioni metereologiche, il riconoscimento di immagini, e la diagnostica medica.

Conclusioni

Questa digressione nel mondo dei modelli matematici è stata necessariamente episodica e superficiale, d'altra parte per una trattazione sistematica non sarebbe bastata un'ora ma, forse, nemmeno un intero corso.

Il mio proposito era quello di aprire degli squarci nel panorama del mondo dei modelli matematici per mettere in evidenza quanto esso sia vasto, articolato e denso di interessanti prospettive. Purtroppo in tale panorama la figura del Matematico, soprattutto in Italia è spesso assente. Questa situazione non è solo imputabile alla sfiducia e istintiva difesa dei "non addetti ai lavori" nei riguardi della Matematica ma anche al fatto che storicamente in Italia la "Cultura" ha coinvolto nel suo "Umanesimo" anche la Matematica valorizzandone soprattutto l'aspetto logico-filosofico, piuttosto che quello di strumento capace di interpretare fenomeni naturali, per cui occuparsi di matematica applicata è stato considerato per lungo tempo un pò come "sporcarsi le mani". Ma le cose sembra stiano cambiando. Basterà a questo proposito citare la circolare del 26-4-99 contenete le proposte di classi d'interesse per le facoltà di Scienze e affini, emerse a seguito della conferenza dei presidi del 31-3-99 e della riunione del gruppo di area del 16-4-99.
In tale circolare tra gli obiettivi qualificanti per tutti i corsi di laurea in Matematica si richiede che i laureati "siano familiari col metodo scientifico e siano in grado di comprendere e utilizzare descrizioni e modelli matematici di situazioni concrete di interesse scientifico ed economico". Il mio augurio è che in un prossimo futuro molti giovani studiosi di Matematica si inseriscano da protagonisti in questo mondo e svolgano quella funzione di collegamento di cui s'è parlato prima; e questo per due principali ragioni:

la prima pratica; infatti in un mondo in cui la ricerca del lavoro è spesso per i giovani lunga, alienante e non sempre coronata da successo, è utile tener presente che le risorse sono molto più facilmente reperibili se destinate al mondo delle applicazioni; e questo tra le altre ragioni perchè le risorse sono gestite dai politici che, come è noto sono molto sensibili alle ricadute in termini di immagine sulla popolazione degli elettori; in soldoni : è molto più popolare affermare che si spende per una ricerca sui modelli matematici del diabete piuttosto che per studiare p.e. oggetti sofisticati di algebra e geometria, per quanto affascinante utile e imprescindibile sia, anche in Matematica , la ricerca fondamentale.

Il secondo motivo è ideale: infatti se i Matematici non occuperanno il posto che loro spetta nel mondo delle applicazioni, tale spazio non rimarrà vuoto ; esso verrà espropriato, come già sta avvenendo, da biologi, medici, ingegneri, che, nell'impossibilità di dialogare con i Matematici, si costruiranno da soli i loro modelli e necessariamente, a causa della loro vocazione, ne imposteranno lo studio privilegiando l'aspetto sperimentale e qualitativo piuttosto che quello strutturale e quantitativo. Questo, a mio giudizio, finirà per comportare un impoverimento dell'intera area sul piano culturale perchè... citando Galilei:

Una disciplina ha tanto più la dignità di Scienza quanto più fa uso dello strumento matematico.

Bibliografia

[1] **P. Delattre** -On Methodology for the elaboration of a theoretical model, *International J. Systems vol 2 pp87-97 1975.*

[2] **V. Comincioli** -Metodi Numerici e Statistici per le Scienze Applicate, *Casa Editrice Ambrosiana 1996*

[3] **S. Audoly, L.D'Angiò, Saccomani M.P., C.Cobelli** -Global Identifiability of Linear Compartmental Models - A Computer-Algebra Algorithm, *IEEE Transaction on Biomedical Engineering Vol 45 num 1 1998*

[4] **V.Barnett** -Comparative Statistical Inference, *Casa editrice Wiley New-York 1973*

[5] **A.Mazzetti** -Reti Neurali Artificiali, *Casa Editrice Apogeo 1996*